Théorème :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme :

$A = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline O_{q,p} & C \end{array}\right)$ ou $A = \left(\begin{array}{c|c} B & O_{p,q} \\ \hline D & C \end{array}\right)$ avec $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

On a : $\det(A) = \det(B).\det(C)$.

Démonstration :

Nous allons établir le résultat dans le cas où $A = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline O_{q,p} & C \end{array}\right)$, l'autre cas s'en déduit par transposition.

Introduisons quelques notations qui nous serons utiles pour réinterpréter le problème :

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$.

Posons $F = \text{Vect}(e_1,\ldots,e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_{p+1},\ldots,e_n)$.

Les familles $\mathcal{F} = (e_1,\ldots,e_p)$ et $\mathcal{G}$=$(e_{p+1},\ldots,e_n)$ sont des bases de respectivement F et G.

On a : $E = F \oplus G, \dim F = p$ et $\dim G = n - p = q$.

Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ la famille de vecteurs de E déterminée par $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)$.

On a $\det A = \det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)$.

Pour tout $1 \le j \le p$ on observe que $x_j \in F$.

Pour tout $p+1 \le j \le n$, on peut écrire $x_j = x_j' + x_j''$ avec $x_j' \in F$ et $x_j'' \in G$.

Par construction $B = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(x_1,\ldots,x_p)$ et $C = \text{Mat}_{\mathcal{G}}(x_{p+1}'',\ldots,x_n'')$.

Par suite on observe que $\det B = \det_{\mathcal{F}}(x_1,\ldots,x_p)$ et $\det C = \det_{\mathcal{G}}(x_{p+1}'',\ldots,x_n'')$.

Ces notations étant introduites, entrons dans la démonstration :

On a $\det A = \det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1}' + x_{p+1}'',\ldots,x_n' + x_n'')$.

Grâce à la multilinéarité du déterminant, on peut développer l'expression précédente, or un déterminant évalué sur une famille contenant au moins $p+1$ vecteurs de F est nul car cette famille est liée, par suite, après simplification des termes nuls apparaissant dans le développement de $\det A$, on obtient :

$\det A = \det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1}'',\ldots,x_n'')$.

Considérons maintenant $\varphi : F^p \to \mathbb{K}$ l'application définie par $\varphi(y_1,\ldots,y_p) = \det_{\mathcal{B}}(y_1,\ldots,y_p,x_{p+1}'',\ldots,x_n'')$.

Cette application est une forme p linéaire alternée sur F, or $\Lambda_p^*(F)$ est une droite vectorielle dont $\det_{\mathcal{F}}$ constitue un vecteur directeur, donc $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \alpha.\det_{\mathcal{F}}$.

On a alors $\det A = \varphi(x_1,\ldots,x_p) = \alpha.\det_{\mathcal{F}}(x_1,\ldots,x_p) = \alpha.\det B$.

Il ne reste plus qu'à évaluer α.

Pour cela considérons $\psi : G^q \to \mathbb{K}$ l'application définie par $\psi(y_{p+1},\ldots,y_n) = \det_{\mathcal{B}}(e_1,\ldots,e_p,y_{p+1},\ldots,y_n)$.

Cette application est une forme q linéaire alternée sur G, or $\Lambda_q^*(G)$ est une droite vectorielle dont $\det_{\mathcal{G}}$ constitue un vecteur directeur, donc $\exists \beta \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \beta.\det_{\mathcal{G}}$.

On a alors $\alpha = \psi(x_{p+1}'',\ldots,x_n'') = \beta.\det_{\mathcal{G}}(x_{p+1}'',\ldots,x_n'') = \beta.\det C$.

Il ne reste plus qu'à évaluer β.

Pour $(y_{p+1},\ldots,y_n) = (e_{p+1},\ldots,e_n)$, on obtient :

d'une part $\psi(e_{p+1},\ldots,e_n) = \det_{\mathcal{B}}(e_1,\ldots,e_p,e_{p+1},\ldots,e_n) = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$

et d'autre part $\psi(e_{p+1},\ldots,e_n) = \beta.\det_{\mathcal{G}}(e_{p+1},\ldots,e_n) = \beta.\det_{\mathcal{G}} \mathcal{G} = \beta$.

Finalement $\beta = 1, \alpha = \det C$ puis $\det A = \det B.\det C$.